

FONCTIONS EXPONENTIELLES

1) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

Approche :

La fonction $\ln$ est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x[= \mathbb{R}$ donc :

Propriété et définition :

La fonction $\ln$ admet une fonction réciproque définie de $] - \infty, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ appelée **fonction exponentielle népérienne** notée : $\exp$

Propriétés immédiates :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\ln(\exp(x)) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\exp(\ln(x)) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R})(\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y))$
- $\exp(0) = 1$; $\exp(1) = e$

Propriété : (monotonie)

La fonction $\exp$ est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résultat :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exp(x) \leq \exp(y) \Leftrightarrow x \leq y)$

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ $\exp(2x^2 - x) = \exp(1 - 3x)$

❷ $\exp(2x^2 - x) \leq \exp(1 - 3x)$

❸ $\ln(2x^2 + x - 3) = 5$

❹ $\ln(2x^2 + x - 3) < 5$

2) l'écriture : e^x .

Propriété :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})(\exp(rx) = (\exp(x))^r)$$

Preuve :

$$\ln((\exp(x))^r) = r \ln(\exp(x))$$

$$= rx$$

$$= \ln(\exp(rx))$$

Résultat :

- $(\forall r \in \mathbb{Q})(\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r)$
- On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exp(x) = (\exp(1))^x = e^x)$

Propriété algébrique :

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{rx} = (e^x)^r \quad (r \in \mathbb{Q})$
- $(\forall x > 0)(e^{\ln x} = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\ln(e^x) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})(e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y))$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y)$

Applications :**Exercice 1 :**

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$1- \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$$

$$2- \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$$

$$3- \frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$(E_1): \quad 5e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x = 0$$

$$(E_2): \quad e^{-x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(E_3): \quad \exp(3x + 14) \leq \frac{3}{2}$$

$$(E_4): \quad e^{-x} - 2e^x + 1 > 0$$

Propriété : (limites usuelles)

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$② \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$④ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Preuve : (En exercice)**Exercice :** Déterminer les limites suivantes :

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-2x}}{e^x + x}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{e^x - 1}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+1} - e}{x}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 3e^x}{e^x - 1}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 e^{(5x+1)}$$

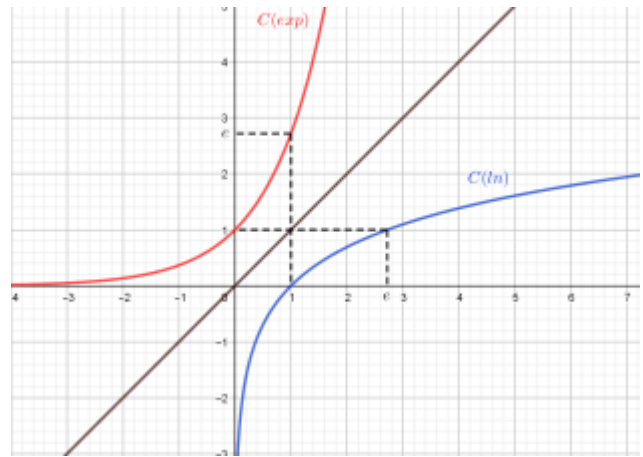
3) Représentation de la fonction $\exp$

La fonction $\exp$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Car l' $\exp$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln$ qui est strictement monotone sur $]0, +\infty[$

Les courbes $C_{\ln}$ et $C_{\exp}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta): y = x$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$		1	e	$+\infty$



4) Dérivation de la fonction $\exp$

On sait que la fonction $\exp$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et on sait que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \left(\ln' x = \frac{1}{x} \right)$

Donc la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R} = \ln(]0, +\infty[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a : $\exp'(x) = (\ln^{-1})'(x)$

$$= \frac{1}{\ln'(\exp(x))}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}}$$

$$= \exp(x).$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Propriété :

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'(x) = \exp(x))$

Corolaire :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $\exp(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\forall x \in I)(\exp(u(x)))' = u'(x) \exp(u(x))$$

Application :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2 e^{-x}$
- $g(x) = e^{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$
- $h(x) = \frac{e^{-x}}{e^{2x+x}}$

Exercice :

Partie 1

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer la limite en $+\infty$

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .
5. a) Montrer que $(\forall t > 0) \left(0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2} \right)$
 b) En déduire que : $(\forall x > 0) \left(\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \right)$
 c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
6. Construire la courbe C_f .

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.
 b) Déterminer la limite en $+\infty$
 c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n .
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$
3. a) Montrer que $(\forall x > 0) \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n} \right)$
 b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$
 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim \alpha_n = 0$.

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a .

1) Définition et résultats :

Propriété et définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R} = \log_a(]0, +\infty[)$ vers $]0, +\infty[$.

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note $\exp_a$

Résultats immédiats :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

- La fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp_a(x) > 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y))$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\log_a(\exp_a(x)) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\exp_a(\log_a(x)) = x)$

2) Une autre écriture de la fonction $\exp_a$

Propriété :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp_a(x) = e^{x \ln(a)})$

Preuve :

Posons : $y = \exp_a(x)$ on a donc $y > 0$ et $x = \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$

D'où : $\ln(y) = x \cdot \ln(a)$; finalement $y = e^{x \ln(a)}$ d'où la propriété.

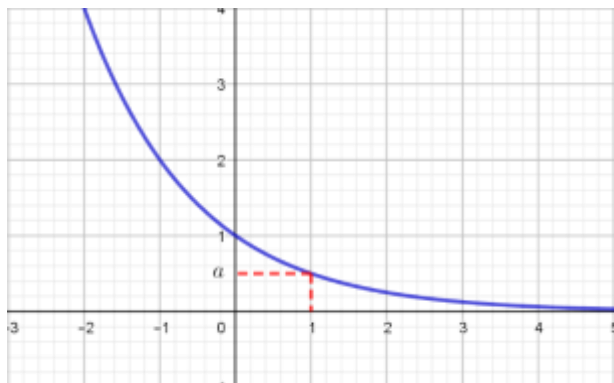
Propriété :

$\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'_a(x) = \ln(a) e^{x \ln(a)})$

Monotonie et représentation :Si $0 < a < 1$:On a $\ln(a) < 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'_a(x) < 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	-	-	-	-
$\exp_a(x)$	$+\infty$	1	a	0

Si $0 < a < 1$:On a $\ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exp'_a(x) > 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'_a(x)$	+	+	+	+
$\exp_a(x)$	0	1	a	$+\infty$

**Propriété caractéristique :**Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y))$.**Conséquences :**Soit $a > 0$ et $a \neq 1$ et x et y deux réels, on a :

- $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$
- $\exp_a(x - y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$
- $\exp_a(rx) = (\exp_a(x))^r$

3) Les puissances réelles.**Rappelle :**

- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x^0 = 1)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(x^{-n} = \frac{1}{x^n} \right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\forall r \in \mathbb{Q}) \left(r = \frac{p}{q} \Rightarrow x^r = \sqrt[q]{x^p} \right) (q \in \mathbb{N}^*)$

Puissances réelle : La notation a^x Soit a un réel strictement positif.

- Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $a^x = 1$
- Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x \ln(a)}$

Exercice 1:

Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{cases} x \mapsto x^x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer la courbe C_f .
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$
7. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.
 - a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$
 - b. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.
 - c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln(x))^n}{x^2}$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1 .
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe C_1 et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .
5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de $f_2(x) - f_1(x)$
 b) En déduire les positions relative des deux courbes C_1 et C_2 ; puis construire C_2
6. Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n .
 - a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(u_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e} \right)^n \right)$
 - b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$
 - c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n \left(e^{\frac{n+1}{2}} \right) \right)$
 - d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n} \right)$; En déduire $\lim u_n$.

Exercice 3 :**Partie 1**

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction $t \rightarrow e^{-t}$; montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\exists \theta \in \mathbb{R}^{*+}) \left(e^\theta = \frac{x}{1-e^{-x}} \right)$
2. En déduire que : $(\forall x > 0)(1 - x < e^{-x})$ et que $(\forall x > 0)(1 + x < e^x)$
3. En déduire que : $(\forall x > 0)(0 < \ln \left(\frac{x e^x}{e^x - 1} \right) < x)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
3. a) Montrer que $(\forall x > 0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2} \right)$
 b) Montrer que $(\forall x > 0) \left(\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} \cdot f(x) \right)$
 c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
4. a) Montrer que : $(\forall x > 0) \left(f'(x) = \frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2} \right)$
 b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f .
 c) Construire la courbe C_f .
 d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $J = f([0, +\infty[)$.

Partie 3 :

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in]0, +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = \ln(f(u_n)))$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3. a) Montrer que l'équation $\ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.
 b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$